Internetová matematická olympiáda
8. ročník, 24. 11. 2015

1. Baví se student Fakulty strojního inženýrství VUT v Brně (FSI) s kamarádem:

   Kamarád: *„Co jsi tak veselý? Něco slavíš?“*
   Student FSI: *„Já přímo ne, ale naše Fakulta strojního inženýrství slaví tento rok významné výročí svého založení.“*
   Kamarád: *„Nepovídej. A kolikáté už?“*

   Na to se student FSI jen usmál a prozradil dvě indicie, jak to zjistit:

   A) Součtem řady $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \ln\left(1-\frac{1}{k^2}\right)$ získejte číslo s.

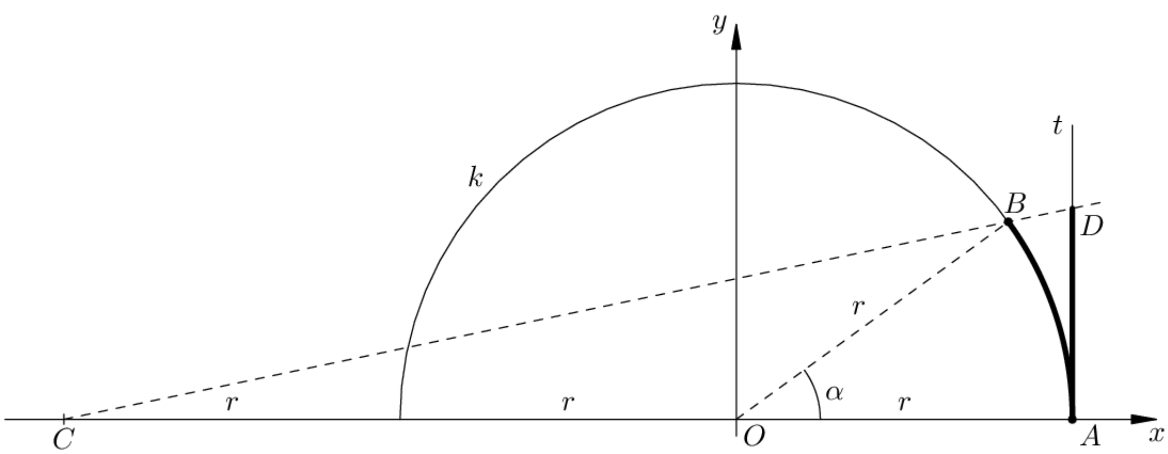
   B) Číslo s dosaďte do rovnice $s + \ln\dfrac{57}{29} = \ln(1-x)^2 - \ln(x^2-1)$ a řešením x rovnice je hledané výročí Fakulty strojního inženýrství.

   Za pomoci indicií A) a B) vypočtěte, kolikáté výročí FSI v roce 2015 slaví.

2. Je dána kružnice k se středem v bodě O a poloměrem r, kde $r > 0$. Na kružnici k jsou dány body A a B tak, že pro středový úhel $\alpha = \sphericalangle AOB$ platí $\alpha < 60^\circ$. Na polopřímce AO určeme bod C tak, že $|AC| = 3r$. V bodě A sestrojme tečnu t ke kružnici k. Průsečík tečny t a polopřímky CB označme D, viz Obrázek 1.

   a) Určete obecně hodnotu rozdílu délky kruhového oblouku AB a úsečky AD v závislosti na poloměru r a úhlu α.

   b) Sestavte tabulku, ve které tento rozdíl vyčíslete s přesností na 5 desetinných míst pro hodnotu poloměru $r = 10$ cm a úhel $\alpha = 30^\circ$. Tabulku pro názornost doplňte o výpočet rozdílu pro $r = 10$ cm a úhel $\alpha = 60^\circ$ s vědomím, že tento úhel není podle zadání přípustný.



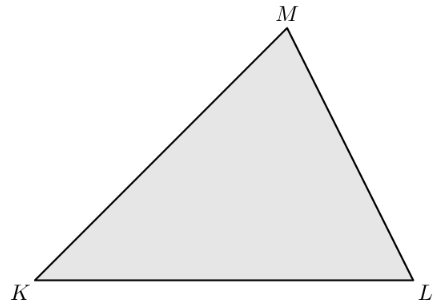
Obrázek 1: K zadání příkladu 2

3. Řešte soustavu rovnic a řešení zdůvodněte

$$\alpha + \beta = 115^\circ, \tag{1}$$

$$\cos^2(\alpha-\beta) - \cos^2(\alpha-\beta)\cos^2\beta + 2\sin(\alpha-\beta)\cos(\alpha-\beta)\sin\beta\cos\beta + \\ + \sin^2(\alpha-\beta)\cos^2\beta + \left(\cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}. \tag{2}$$

4. Je dán obecný trojúhelník KLM, viz například Obrázek 2. Sestrojte čtverec $ABCD$ tak, aby bod M byl středem čtverce $ABCD$, dále aby přímka AB procházela bodem K a přímka CD procházela bodem L. Zapište postup konstrukce.



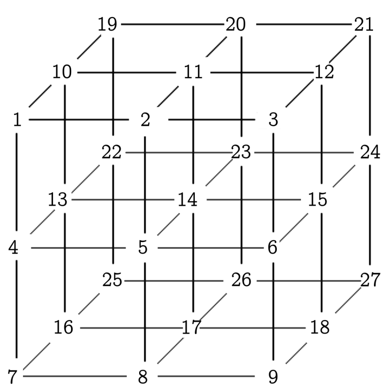
Obrázek 2: K zadání příkladu 4

5. V továrně se na dvou výrobních linkách vyrábí barevné želé bonbóny v barvě červené, zelené a modré. První linka vyrábí dvakrát více bonbónů než druhá. První linka vyrobí želé bonbóny v barvách v poměru $0,25 : 0,25 : 0,5$, druhá linka vyrobí želé bonbóny v barvách v poměru $0,1 : 0,5 : 0,4$. Bonbóny z obou linek se na konci továrny smíchají dohromady a balí se do balení po 10 kusech. Jeden takový balíček si koupím.
   a) Jaká je pravděpodobnost, že první bonbón vytažený z koupeného balíčku, bude červený?
   b) Jaká je pravděpodobnost, že tento červený bonbón byl vyroben na druhé lince?

6. Je dána kružnice k se středem $K = [0, 0]$ a poloměrem jedna jednotka. Uvažujme bod A, který leží na této kružnici a může se po ní pohybovat. Dále uvažujme bod B, který se může pohybovat po úsečce KL, kde $L = [2, 0]$. Body A a B jsou spolu spojeny úsečkou délky jedna jednotka. Při pohybu bodu A po kružnici se tedy uvádí do pohybu i bod B. Odvoďte parametrické rovnice trajektorie středu S úsečky AB. Trajektorii také nakreslete.

7. Mějme 3^n na první pohled identických mincí, kde $n \in \mathbb{N}$, mezi kterými jsou 2 mince falešné. Falešné mince jsou lehčí než mince pravé. Jakým nejmenším počtem vážení jsme schopni pomocí dvouramenných vah schopni najít obě lehčí falešné mince?

8. Mějme 3D síť 3x3x3 složenou z 27 očíslovaných bodů dle Obrázku 3. Těmito body veďme cestu reprezentovanou vektorem čísel (pozic) tak, abychom navštívili každý bod právě jednou. Kolik takových cest dostaneme, pokud začneme ve středu sítě, tj. na pozici číslo 14? Dávejte pozor a nepočítejte rotačně symetrická řešení vícekrát.



Obrázek 3: 3D síť očíslovaných bodů k zadání příkladu 8

9. Jsou dána kladná čísla $a_1, a_2, \dots, a_n$, kde $n \in \mathbb{N}$. Dvojici indexů (k, m) nazveme „dobrou“ pro každé $j = 1, \dots, n$, když
$$(a_k + a_j)(m - k) \geq (a_k + a_m)(j - k) \tag{3}$$
a nazveme „špatnou“, když
$$(a_k + a_j)(m - k) \geq (a_k + a_m)(m - j). \tag{4}$$
Dokažte, že existuje nejméně jedna dvojce indexů (k, m), kterou nazveme „dobrou“ a „špatnou“ současně.

10. Posloupnost je dána rekurentním vzorcem $a_n = 2a_{n-1} + 5a_{n-2} - 6a_{n-3}$, pro $n \geq 4$ a hodnotami prvních tří členů $a_1 = 30$, $a_2 = 60$ a $a_3 = 90$. Určete explicitní vzorec pro n-tý člen posloupnosti pro $n \geq 4$.

Internetovou matematickou olympiádu pro Vás organizuje Ústav matematiky FSI VUT v Brně a letos se koná při příležitosti 115. výročí založení Fakulty strojního inženýrství VUT v Brně.

Na přípravě zadání a celé organizaci soutěže se podílejí studenti bakalářského a magisterského oboru Matematické inženýrství, doktorského oboru Aplikovaná matematika a oboru Inženýrská mechanika. Autorem grafického návrhu diplomu je student oboru Průmyslový design ve strojírenství.

`www.matholymp.fme.vutbr.cz`
`www.math.fme.vutbr.cz`
`www.fme.vutbr.cz`
`www.vutbr.cz`
Mgr. Jana Hoderová, Ph.D., hoderova@fme.vutbr.cz