Internetová matematická olympiáda - 30. listopadu 2010

3. ročník

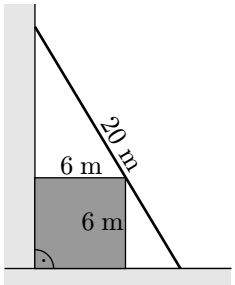
1. Do internetové matematické olympiády se přihlásilo 121 týmů. Jedním z těchto týmů je tým kapitána Filipa Chytrého. Olympiáda obsahuje celkem 5 příkladů. Stručná idea, týkající se hodnocení příkladů, je tato: kompletně vyřešený příklad je ohodnocen koeficientem 1,00 a například z poloviny vyřešený příklad je ohodnocen koeficientem 0,50. Výsledná bodová hodnota příkladu je nepřímo úměrná počtu úspěšných řešitelů (viz Pravidla Internetové matematické olympiády). Kapitán Chytrý svému týmu velmi věří. Ví, že by byli schopni spočítat všech pět příkladů kompletně, ale potřebovali by na to více času. Ví, že ve stanoveném čase zvládne právě 3 příklady (kompletně). Proto po přečtení zadání všech příkladů udělá tento odhad, týkající se schopností zbývajících 120ti týmů:

   - 1. příklad vyřeší polovina týmů s koeficientem 1,00, čtvrtina s koeficientem 0,50 a ostatní za 0,00.
   - 2. příklad vyřeší $\frac{1}{10}$ týmů s koeficientem 1,00, $\frac{1}{2}$ zbytku týmů s koeficientem 0,50 a ostatní za 0,00.
   - 3. příklad vyřeší 30 týmů s koeficientem 1,00, $\frac{5}{6}$ zbytku týmů s koeficientem 0,50 a ostatní za 0,00.
   - 4. příklad vyřeší $\frac{3}{8}$ týmů s koeficientem 1,00, $\frac{1}{4}$ s koeficientem 0,50 a ostatní za 0,00.
   - 5. příklad vyřeší $\frac{1}{8}$ týmů s koeficientem 1,00, $\frac{1}{5}$ s koeficientem 0,50 a ostatní za 0,00.

   Kapitán Chytrý zvolí strategii, která povede k maximálnímu možnému zisku bodů pro jeho tým. Rozhodněte, kterým příkladům má tým Filipa Chytrého věnovat maximální pozornost.

2. Tyč délky 20 m je svým horním koncem opřená o zeď a zároveň se dotýká bedny o rozměrech 6 m × 6 m, viz Obrázek 1. V jaké výšce se nachází horní konec tyče?

   Poznámka: Tento příklad je možno řešit několika více či méně elegantními způsoby. Týmy, které řešení povedou přes rovnici čtvrtého stupně, kterou následně vyřeší pouze přibližně numericky, získají za příklad koeficient maximálně 0,50.



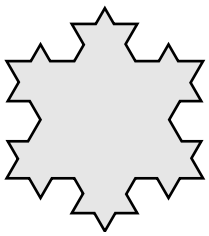
Obrázek 1: K zadání příkladu 2

3. Dlaždič psal objednávku čtvercových dlaždic na vydláždění podlahy čtvercové místnosti. Byl tak roztržitý, že místo počtu dlaždic potřebných podél jedné stěny napsal do objednávky svůj věk. Následně mu dovezli o 1111 dlaždic víc, než bylo potřeba. Jak byl dlaždič starý?

4. Vyřešte algebrogram, tj. různá písmena nahraďte různými číslicemi 0 až 9 tak, aby byly splněny uvedené početní operace.

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
A & B & C & - & D & E & C & = & F & F & G \\
 & : & & & & + & & & & - & \\
 & H & & \cdot & & E & C & = & E & G & A \\
\hline
 & J & A & + & D & A & B & = & K & C & C
\end{array}
$$

5. Uvažujme rovinný útvar, který vznikne následující konstrukcí: vyjdeme z rovnostranného trojúhelníku, jehož strany rozdělíme na třetiny. Nad prostřední třetinou každé strany vztyčíme opět rovnostranný trojúhelník a původní prostřední třetinu vyjmeme. Tento postup nyní opakujeme až do nekonečna. (Na obrázku 2 je uvažovaný obrazec zobrazen po dvou krocích.) Vypočítejte obvod a obsah tohoto útvaru.

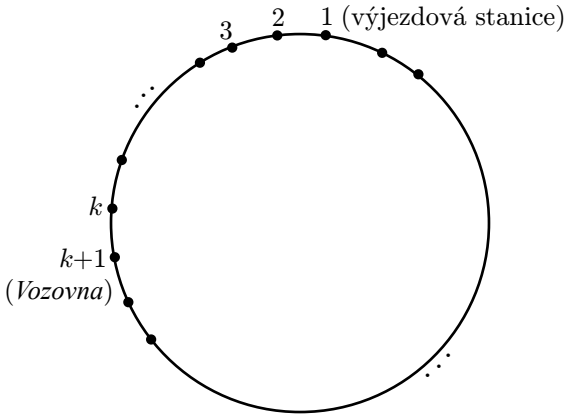


Obrázek 2: K zadání příkladu 5

6. Uvažujme v rovině množinu bodů, jejichž obě souřadnice jsou celá čísla. Zvolme bod $B = [2; 3]$. Rozhodněte, zda v rovině bodů existuje přímka, která prochází bodem B a současně neprotne žádné další uvažované body. Své rozhodnutí zdůvodněte.

7. Nechť a, b, c jsou přirozená čísla, tj. $a, b, c \in \mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$. Pomocí sumační symboliky zapište, kolik existuje řešení nerovnice
$$a + b + c \leq 100.$$

8. Tři řidiči jezdí na okružní lince autobusu v Brně. Každý z řidičů po této trase jede v jiný den a v jinou dobu, vždy ale začínají ve stejné výjezdové stanici č. 1. Po určitém počtu odpracovaných hodin dokončí okružní jízdu do stanice č. 1 a poté ještě ujedou k zastávek do stanice *Vozovna* (což je $(k + 1)$. stanice na trase okružní linky). Viz Obrázek 3.



Obrázek 3: K zadání příkladu 8

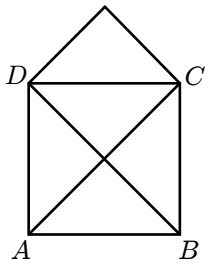
Víme, že:

- První řidič ujel přesně 716 stanic a pak odešel ze stanice *Vozovna* domů.
- Druhý řidič si po ujetí $\sum_{l=1}^{20} l$ zastávek všiml, že stanici *Vozovna* přejel o k zastávek.
- Třetí řidič ví, že k je prvočíslo.

Jaké číslo má tedy stanice s názvem *Vozovna*?

9. Kolika různými způsoby je možné jedním tahem začínajícím v bodě A namalovat domeček uvedený na Obrázku 4? Uveďte nejen počet řešení, ale také systematický postup.

   Poznámka: V bodě „uvnitř“ domečku (v průsečíku úhlopříček) není možné měnit směr, tj. lze jít tahem z A přímo do C, ale nelze jít tahem z A do středu domečku a odtud do B a podobně.



Obrázek 4: K zadání příkladu 9

10. Laboratorní myš Evelína stojí na rovné desce v bodě $[0, 0]$. Může udělat právě devět různých pohybů=„kroků“. Se stejnou pravděpodobností může udělat jeden krok na sever (tedy na pozici $[0, 1]$), východ (tedy na pozici $[1, 0]$), jih (na pozici $[0, -1]$), západ (na pozici $[-1, 0]$), severovýchod (na pozici $[1, 1]$), jihovýchod (na pozici $[-1, 1]$), jihozápad (na pozici $[-1, -1]$), severozápad (na pozici $[-1, 1]$) nebo zůstat na místě.

    S jakou pravděpodobností bude po pěti krocích na pozici $[4, 3]$? Výsledek udejte nejlépe ve tvaru zlomku.